

CURS VI

Modelarea scurgerii în bazine hidrografice

Modelarea scurgerii solide în rețeaua hidrografică

1. Cazul unidimensional

Structura modelului [Popa, 1997]:

Pentru evoluția fazei lichide se consideră ecuațiile Saint - Venant sub forma:

- ecuația de continuitate:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

- ecuația de mișcare:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} + g \cdot S_f = 0 \quad (2)$$

Pentru transportul de aluviuni se poate deduce o ecuație de continuitate a debitului solid sub forma:

$$(1 - p) \tilde{B} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial Q_s}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

la care trebuie să se adauge o relație de calcul pentru debitul total de aluviuni exprimată prin formula generală:

$$Q_s = Q_s(V, h) \quad (4)$$

unde: $h = h(x, t)$ – adâncimea apei; $V = V(x, t)$ – viteza apei; x – direcția de curgere a apei; t – timpul; g – accelerația gravitațională; ξ – cota patului albiei față de un plan orizontal de referință; S_f – panta liniei energetice în regim staționar; p – porozitatea materialului din patul albiei; \tilde{B} - lățimea secțiunii transversale afectată de transportul de aluviuni; Q_s – debitul volumic solid transportat.

Domenii de aplicabilitate:

- modelul se poate aplica pentru studiul interacțiunii curentului lichid cu patul mobil al albiei, în situațiile în care se pot lua în considerare ipotezele de la ecuațiile Saint – Venant.

2. Cazul bidimensional

- a). Pentru faza fluidă se poate scrie ecuația lui Reynolds pentru curgere turbulentă
b). Pentru faza solidă se poate scrie ecuația de transport al sedimentelor în model convectiv - difuziv (curgere neuniformă, sedimente neuniforme) [Cheng, 1985]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} - w \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} k \frac{\partial c}{\partial y} \quad (5)$$

unde: u – viteza de curgere în direcție longitudinală x ; w – mărimea hidraulică a particulelor sedimentare; y – direcția verticală; k – coeficient de difuzie pentru sedimente; c – concentrația sedimentelor în suspensie.

Condiții la limită care se pun la rezolvarea analitică sau numerică a acestei ecuații:

$$k \frac{\partial c}{\partial y} + wc = 0, \text{ pentru } y = h \quad (6)$$

$$-(k \frac{\partial c}{\partial y} + wc)_{y=0} = -\alpha w(c - c^*)_{y=0} \quad (7)$$

unde: c^* - concentrația la nivelul patului albiei; α - coeficient adimensional, care reflectă interacțiunea dintre patul albiei și sedimente.

Domenii de aplicabilitate:

- modelul se poate aplica pentru studiul interacțiunii curentului lichid cu patul mobil al albiei, fiind mai complex decât modelul unidimensional anterior
- modelul ține cont numai de debitul solid în suspensie.

Model de transport solid în canale artificiale [Singh et al, 1985]

Structura modelului:

Ecuația pentru calculul debitului de fund (figura 1):

$$(1-n)\delta(x,t)_{,t} + q_b(x,t)_{,x} = q_0(x,t) \quad (8)$$

unde: $\delta(x,t)$ - grosimea stratului de sedimente; $q_b(x,t)$ – debitul solid în direcție longitudinală; $q_0(x,t)$ – debitul solid care intră sau iese din canal la suprafața liberă a apei $z = \delta(x,t)$; x – direcția longitudinală; t – timpul; n – porozitatea materialului solid.

Ecuația pentru calculul debitului solid în suspensie:

$$c(x,t)_{,t} + u(x,t)c(x,t)_{,x} - D(x,t)c(x,t)_{,xx} = S_e(x,t) + S_d(x,t) \quad (9)$$

unde: $c(x,t)$ – concentrația sedimentelor în suspensie; $u(x,t)$ – viteza apei în direcție longitudinală; $D(x,t)$ – coeficient de dispersie; $S_e(x,t)$ - rata eroziunii; $S_d(x,t)$ – rata depunerilor.

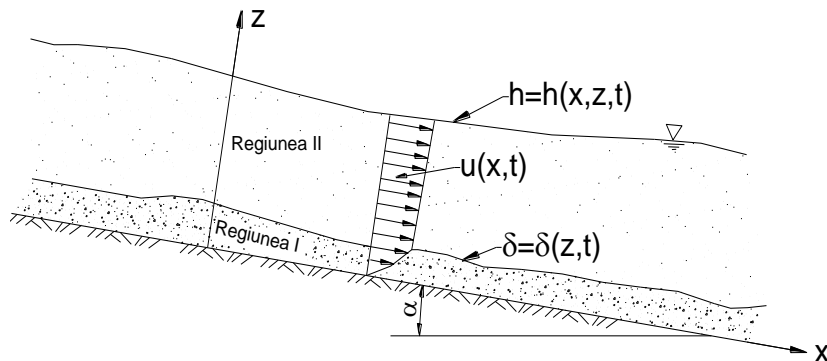


Fig.1 Transportul sedimentelor în canale artificiale (după Singh, 1985)

Domenii de aplicabilitate:

- modelul se poate aplica în cazul canalelor artificiale, cu secțiune transversală cunoscută;
- modelul se bazează pe unele ipoteze simplificatoare: porozitatea materialului de fund rămâne constantă, distribuția sedimentelor în suspensie este uniformă pe verticală;
- ecuațiile se pot asocia cu diferite ecuații ale fazei lichide, funcție de tipul și regimul de mișcare al apei.

3. Cazul tridimensional

Structura modelului:

a). Pentru faza lichidă se scriu ecuațiile Navier-Stokes și ecuația de continuitate (forma vectorială).

b). Pentru faza solidă se scrie ecuația de transport (formă vectorială) [Wang, 1990]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} - \nabla \cdot (\varepsilon_s \nabla c) + \nabla \cdot (c\bar{u}) - \frac{\partial}{\partial t} (w_s c) = 0 \quad (10)$$

unde: c – concentrația sedimentelor; w_s – viteza de sedimentare a particulei; ε_s – coeficient de dispersie turbulentă pentru sedimente.

Ecuația se bazează pe principiul conservării masei sedimentelor și pe transportul difuziv și dispersiv de masă, ecuația a fost dezvoltată de McLaughlin (1961). Curgerea fazei lichide este considerată turbulentă.

Dezvoltarea ecuației de mai sus este [Krishnappan et al, 1989]:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial(uc)}{\partial x} + \frac{\partial(vy)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} [(w - w_s)c] - \frac{\partial}{\partial x} (\epsilon_x \frac{\partial c}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y} (\epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z} (\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z}) = 0 \quad (11)$$

unde: C – concentrația sedimentelor în suspensie; t – timpul; w_s – viteza de sedimentare a particulelor (mărimea hidraulică); u,v,w – componentele vitezei după cele trei direcții x,y,z (figura 2); $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ – coeficienții de dispersie turbulentă.

Condițiile la limită care se pun sunt:

$$\begin{aligned} (w - w_s)c - \epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} &= 0 \quad \text{dacă } z = h \text{ la suprafața apei} \\ S_R + (1 - P_d) \cdot w_s \cdot c &= -\epsilon_z \frac{\partial c}{\partial z} \quad \text{dacă } z = 0 \text{ la fundul apei} \\ v \cdot c - \epsilon_y \frac{\partial c}{\partial y} &= q_s \quad \text{și } y = B \text{ pe maluri} \end{aligned} \quad (12)$$

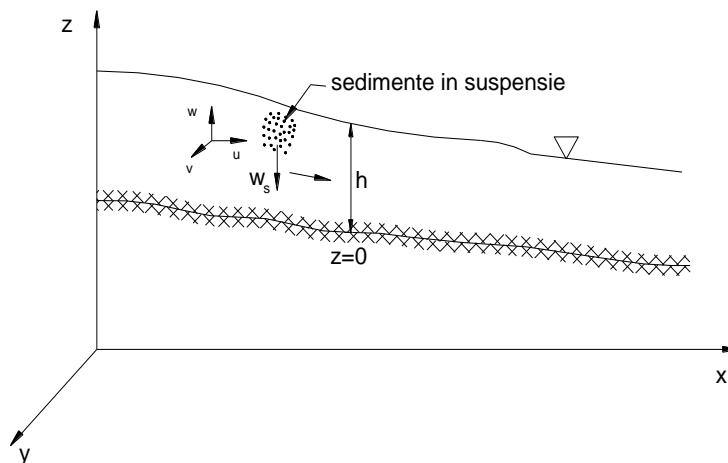


Fig.2 Axele de coordonate

unde: h – adâncimea apei; P_d – probabilitatea ca o particulă să nu fie antrenată de curentul de apă; S_R – rata de antrenare a sedimentelor de pe unitatea de suprafață a patului albiei; q_s – debitul solid provenit din eroziunea malurilor apei.

Domenii de aplicabilitate:

- fluid în curgere turbulentă
- se poate utiliza pentru investigarea eroziunilor locale, pentru studiul depunerilor de particule solide în vecinătatea structurilor hidraulice.

Calculul debitului solid târât

Majoritatea formulilor de calcul ale debitului solid au fost deduse pe cale experimentală în laborator, pentru particule de diferite mărimi și fracțiuni granulometrice și diferite regimuri de curgere.

Calculul debitului solid târât se poate face pe baza a trei concepte [Vladimirescu, 1984; Mateescu, 1961; Cioc, 1975; Chanson, 1999]:

- conceptul efortului tangențial critic de antrenare (Du Boys, Shields, Meyer – Peter – Müller, Einstein – Brown, Schoklitsch, Engelund – Hansen, Yalin, Nielsen etc.)
- conceptul vitezei critice de antrenare (Levy, Schoklitsch, Meyer – Peter etc.)
- conceptului probabilistic (Einstein).

În tabelul de mai jos se prezintă evoluția formulelor de calcul pentru debitul solid târât.

Autor	Formulare	Observații
1	2	3
Boys (1879)	$q_s = \lambda \tau_0 (\tau_0 - (\tau_0)_c)$	λ - coeficient care depinde de caracteristicile sedimentelor.
	$\lambda = \frac{0.54}{(\rho_0 - \rho)g}$ Schoklitsch (1914)	Experimente cu particule uniforme de nisip și porțelan.
	$\lambda \cong d_s^{-3/4}$ Straub (1935); $0.125 < d_s < 4$ mm	Bazate pe date experimentale.
Schoklitsch (1930)	$q_s = \lambda' (\sin \theta)^k (q - q_c)$; $q_c = 1.944 \times 10^{-2} d_s (\sin \theta)^{-4/3}$ $0.305 < d_s < 7.02$ mm	Bazate pe date experimentale.
Shields (1936)	$\frac{q_s}{q} = 10 \frac{\sin \theta}{s} \frac{\tau_0 - (\tau_0)_c}{\nu g (s-1) d_s}$; $1.06 < s < 4.25$ $1.56 < d_s < 2.47$ mm	Bazate pe date experimentale.
Einstein (1942)	$\frac{q_s}{\sqrt{(s-1)gd_s^3}} = 2.15e^{\left(\frac{-0.391\rho(s-1)gd_s}{\tau_0}\right)}$ $\frac{q_s}{\sqrt{(s-1)gd_s^3}} < 0.4$; $1.25 < s < 4.25$ $0.315 < d_s < 28.6$ mm	Experimente de laborator. Nu se poate aplica pentru nisip. $d_s \approx d_{35}$ la d_{45}
Meyer - Peter (1949, 1951)	$\frac{\dot{m}^{2/3} \sin \theta}{d_s} - 9.57(\rho g (s-1))^{10/9} =$ $0.462(s-1) \frac{(\rho g (\dot{m}_s)^2)^{2/3}}{d_s}$ $1.25 < s < 4.2$	Experimente de laborator. Distribuție uniformă la pante mici.
	$\frac{q_s}{\sqrt{(s-1)gd_s^3}} = \left(\frac{4\tau_0}{\rho(s-1)gd_s} - 0.188 \right)^{3/2}$	Experimente de laborator. Particule de diferite forme și dimensiuni. $d_s \approx d_{50}$

1	2	3
Einstein (1950)	$\frac{q_s}{\sqrt{(s-1)gd_s^3}} = f\left(\frac{\rho(s-1)gd_s}{\tau_0}\right); \quad \frac{q_s}{\sqrt{(s-1)gd_s^3}} < 10$ $1.25 < s < 4.25$ $0.315 < d_s < 28.6 \text{ mm}$	Experimente de laborator. Pentru nisipiuri. $d_s \approx d_{35}$ la d_{45}
Schoklitsch (1950)	$\dot{m}_s = 2500(\sin \theta)^{3/2}(q - q_c)$ $q_c = 0.26(s-1)^{5/3} d_{40}^{3/2} (\sin \theta)^{-7/6}$	Bazat pe experimente și măsurători din teren. (fluviile Dunăre și Aare)
Nielsen (1992)	$\frac{q_s}{\sqrt{(s-1)gd_s^3}} = \left(\frac{12\tau_0}{\rho(s-1)gd_s} - 0.05\right) \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho(s-1)gd_s}}$ $1.25 < s < 4.22$ $0.69 < d_s < 28.7 \text{ mm}$	Reanalizarea datelor de laborator

unde: \dot{m} - debitul masic de apă pe unitatea de lățime a albiei; \dot{m}_s - debitul masic de sedimente pe unitatea de lățime a albiei; q – debitul de apă pe unitatea de lățime a albiei; q_s – debitul solid pe unitatea de lățime a albiei; $(\tau_0)_{cr}$ – efortul tangențial critic de antrenare; τ_0 – efortul tangențial; s – raportul dintre densitatea sedimentelor și densitatea apei; d_s – diametrul sedimentelor.

Determinarea debitului solid târât prin măsurători pe teren se face cu diferite tipuri de batometre, prin prelevări de probe de pe fundul albiei. Debitul solid târât este:

$$G_{st} = \frac{1}{2}g_1l_1 + \frac{1}{2}(g_1 + g_2)l_2 + \dots + \frac{1}{2}g_n l_{n+1} \quad (13)$$

$$\text{unde } g_i = \frac{100P_i}{bt} \quad [g/m.s]$$

unde: P_i – greutatea aluviunilor care trec prin b (care este de fapt lățimea batometrului) în timpul t ; l_i – distanța dintre verticale, care însumate dau lățimea activă de circulație a aluviunilor de fund.

O altă metodă de calcul este:

$$G_{st} = aG_a + bG_b + \dots \quad (14)$$

unde: G_{st} – debitul solid de fund; G_a, G_b, \dots – debitele solide pentru fiecare fracțiune granulometrică; a, b, \dots – procente de greutate ale fracțiunilor granulometrice ($a + b + \dots = 1$).

Calculul debitului solid în suspensie

Formulele pentru calculul debitului solid în suspensie au la bază una din următoarele teorii: teoria difuziei turbulente, teoria energetică și teoria gravitațională. Cea mai răspândită este teoria difuziei turbulente [Șerban et al, 1989]:

$$q_{ss} = \rho_s \cdot g \cdot \int_a^h c v dy \quad (15)$$

unde: q_{ss} – debit solid în suspensie; v – viteza apei; ρ_s – densitatea medie a sedimentelor; g – accelerația gravitațională; c – concentrația aluviunilor la nivelul y , care se obține utilizând teoria difuziei turbulente.

Pentru determinarea lui c se pornește de la ecuația difuziei turbulente sub formă bidimensională:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = w_s \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (16)$$

unde: u, v - vitezele medii ale apei în direcțiile x și y ; t – timpul; w_s – mărimea hidraulică; ε_s – coeficient de difuzie turbulentă pentru apă cu suspensii în direcție verticală; $\frac{\partial c}{\partial y}$ – gradientul concentrației aluviunilor în suspensie pe direcție verticală.

Dacă suspensia este stabilă, fluxul net pe verticală este nul și ecuația se reduce la:

$$w_s c + \varepsilon_s \frac{\partial c}{\partial y} = 0 \quad (17)$$

cu o soluție analitică de forma:

$$c = c_a \cdot e^{-w_s \int_a^h \frac{dy}{\varepsilon_s}} \quad (18)$$

unde: $y = a$ – nivel de referință unde concentrația suspensiilor este c_a , de obicei se ia $a =$ grosimea zonei transportului târât.

Dacă se admite că relația Prandtl-Kármán este valabilă în interiorul curgerii, unde predomină tensiunea tangențială turbulentă, și că tensiunea turbulentă are o distribuție liniară, se poate scrie (figura 3) [Hug, 1975]:

$$\frac{c}{c_a} = \left[\left(\frac{h-y}{y} \right) \left(\frac{a}{h-a} \right) \right]^{\frac{w_s}{\sigma_s \chi U_*}} \quad (19)$$

unde: σ_s - numărul lui Prandtl turbulent pentru similitudinea dintre transferul de cantitate de mișcare și transferul masic; χ - constanta universală al lui von Kármán; $U_* = \sqrt{ghI}$ - viteza dinamică a scurgerii; I - panta.

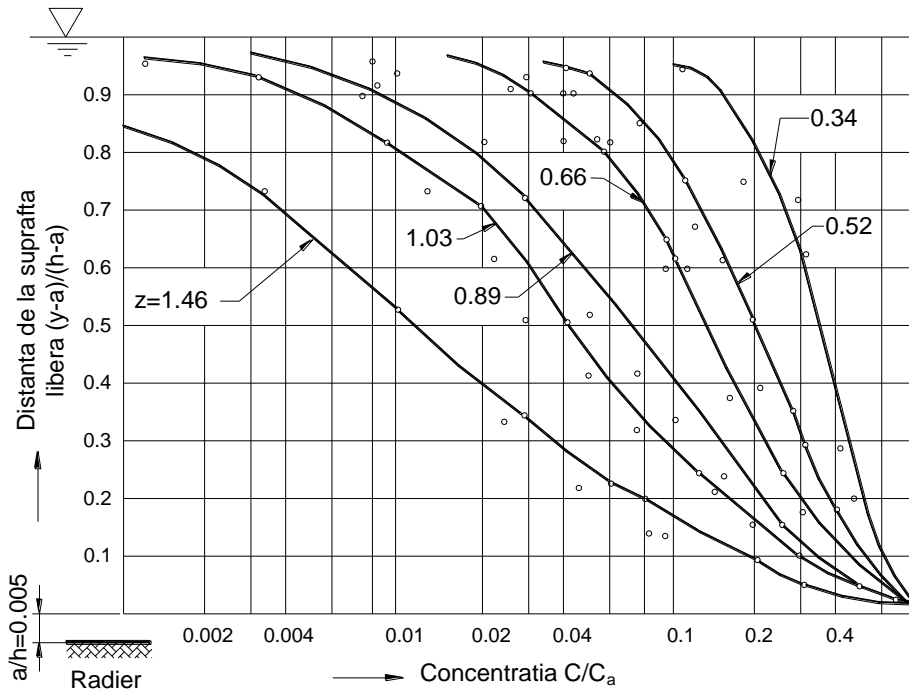


Fig.3 Profile de concentrație laterală (după Hug, 1975)

În literatura de specialitate întâlnim relațiile:

- formula Schimdt – Rouse

$$\frac{C_y}{C_a} = \left(\frac{a}{h-a} \right)^z e^{-2z \left(\frac{2y}{h} - 1 \right)} \quad (20)$$

unde: $z = W/0,4U_*$ este numărul lui Schimdt – Rouse, care exprimă raportul dintre forța de gravitație și forța ascendentă a turbulenței; $U_* = \sqrt{ghI}$ - viteza dinamică a scurgerii; h - adâncimea apei; I - panta.

- formula Van Rijn

$$Q_{ss} = \int_0^h c_y dQ \quad (21)$$
$$dQ = v_y dy = 2,5U_* \ln\left(\frac{y}{30k_s}\right) dy$$

unde: k_s – rugozitatea echivalentă Nikuradze.

Determinarea debitului solid în suspensie prin măsurători pe teren se face cu diferite tipuri de batometre speciale pentru suspensii, prin prelevări de probe din secțiunea transversală a albiei pe un număr de verticale stabilite în funcție de lățimea albiei. Debitul solid în suspensie este:

$$G_{ss} = \sum b \cdot v_m c_m \quad (22)$$
$$c = 10^6 \frac{P}{V} \left[\frac{g}{m^3} \right]$$

unde: b – semisuma distanței până la verticalele imediat alăturate verticalei considerate; v_m – viteza medie a apei pe verticală; c_m – concentrația medie a suspensiilor pe verticală; P – greutatea aluviunilor din probe (g); V – volumul total al probei (cm^3).

Calculul debitului solid total

Cea mai simplă metodă de calcul este prin însumarea debitului solid târât cu cel în suspensie:

$$Q_{\text{solid total}} = Q_{\text{solid târât}} + Q_{\text{solid în suspensie}} \quad (23)$$